27/11/2018

<u>Ορισμός:</u>
Έστω $T: V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Το σύνολο $\{v \in V$ με $T(v) = \bar{0}_W\}$ καλείται πυρήνας της T και συμβολίζεται με $\mathrm{Ker}\,T$. Ιδιότητες: $\mathrm{Ker}\,T = \emptyset$

$$\bar{0}_V \in \mathrm{Ker}\,T \Leftrightarrow T(\bar{0}) = T(0u) = T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = \bar{0}_W$$

$\mathrm{Ker}\,T \leq V$

$u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}\,T \Leftrightarrow T(u_1) = \bar{0}_W = T(u_2)$

$u_1 + u_2 \in \mathrm{Ker}\,T \Leftrightarrow T(u_1 + u_2) = \bar{0}_W \Leftrightarrow T(u_1) + T(u_2) = \bar{0}_W \Leftrightarrow \bar{0}_W + \bar{0}_W = \bar{0}_W$ ισχύει.

Επίσης, $c \cdot u_1 \in \mathrm{Ker}\,T$ για τον ίδιο λόγο.

<u>Π.χ.</u>

Αν ∃ διαφορή σταθ. όρος δεν μπορεί η απεικ. να είναι γραμμική

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$T(x, y) = (2x - y, x - y, x + y)$

Είναι γραμ. απεικ. και θα βρούμε τον πυρήνα και την εικόνα της.

$\operatorname{Ker}T: T(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow (2x-y,\ x-y,\ x+y) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x-y=0 \Leftrightarrow x=0 \\ x-y=0 \Rightarrow x=y \\ x+y=0 \Rightarrow y=0 \end{array}$$

$$T(\mathbb{R}^2) = \{T(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$T(x,y) = (2x-y,\ x-y,\ x+y) = (2x,x,x) + (-y,-y,y) =$$
$$= x(2,1,1) + y(-1,-1,1)$$

$$T(\mathbb{R}^2) = \langle (2,1,1), (-1,-1,1) \rangle < \mathbb{R}^3$$

T δεν είναι επί

T είναι 1-1 όταν $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$ $\quad T(x,y) = T(x',y') \Leftrightarrow$
$(2x-y,\ x-y,\ x+y) = (2x'-y',\ x'-y',\ x'+y')$

$$T(x,y) - T(x',y') = (0,0,0)$$
$$T((x,y)-(x',y')) = (0,0,0)$$
$$(x,y)-(x',y') \in \operatorname{Ker}T = \{(0,0)\}$$

$$(x,y)-(x',y') = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

T είναι μονομορφισμός.

ΠΡΟΤΑΣΗ:
Έστω $T: V \to W$ γραμμική. Η T είναι μονομορφισμός αν-ν $\operatorname{Ker}T = \{\bar{0}_V\}$

Απόδειξη "$\Rightarrow$" Έστω $T(u) = \bar{0}_W = T(\bar{0}_V)$ και T 1-1. Άρα $u = \bar{0}_V \Leftrightarrow \mathrm{Ker}T = \{\bar{0}_V\}$

Ορίζουμε ότι $\mathrm{Ker}T = \{\bar{0}_V\}$ Θ.δ.ο. η T είναι 1-1

Έστω $T(u) = T(v) \Leftrightarrow T(u) - T(v) = \bar{0}_W \Leftrightarrow T(u-v) = \bar{0}_W \Leftrightarrow u - v \in \mathrm{Ker}T = \{\bar{0}_V\} \Rightarrow u - v = \bar{0}_V \Leftrightarrow u = v$

π.χ. δίνεται απεικόνιση

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ με τ.ω

$$T(x,y,z) = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε εάν είναι γραμμική

$$\underset{5\times 3}{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underset{5\times 1}{\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}} \to \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t = \underset{1\times 5}{(\quad\quad)}$$

$T(x,y,z) = (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z,\ 10x+11y+12y,\ 13x+14y+15z)$

T γραμμική
α) $T(x,y,z) + (x',y',z') = \ldots$
β) $T(x,y,z) + T(x',y',z')$
$T(c(x,y,z) = c.T(x,y,z)$

$$T(x,y,z) = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t$$

$$T((x,y,z) + (x',y',z')) = \left(A\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right]\right)^t =$$

$$= \left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)^t = \left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^t + \left(A\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)^t = T(x,y,z) + T(x',y',z')$$

το ίδιο $T(c\cdot(x,y,z)) = cT(x,y,z)$